

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

Множества пика классов гладких функций в строго  
 псевдовыпуклой области

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 26/XI 1983)

Пусть  $D$  — строго псевдовыпуклая область с регулярной границей в пространстве  $\mathbb{C}^n$ , т. е.

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\},$$

где вещественнозначная бесконечно дифференцируемая функция  $\rho(z)$  определена в некоторой окрестности замыкания области  $D$  и комплексный гессиан

$$\sum_{i,k=0}^n \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} w_i \bar{w}_k$$

положительно определен при всех  $z \in \partial D$ . Обозначим через  $A^k(D)$  класс функций, голоморфных в  $D$ , у которых все производные до  $k$ -го порядка непрерывно продолжаются на  $\bar{D}$ . Подмногообразие  $M$  на границе  $\partial D$  области называется многообразием пика для  $A^k(D)$ , если для каждого компакта  $K \subset M$  существует функция  $f \in A^k(D)$  (функция пика) такая, что  $f(z) = 1$  при  $z \in K$ , и  $|f(z)| < 1$  при  $z \in \bar{D} \setminus K$ . Очевидно, это условие можно заменить на

$$f(z) = 0 \text{ при } z \in K, \text{ и } \operatorname{Re} f(z) > 0 \text{ при } z \in \bar{D} \setminus K. \quad (1)$$

В работе Г. М. Хенкина и А. Е. Туманова <sup>(1)</sup> показано, что многообразие пика  $M$  для  $A(D) = A^0(D)$  в каждой точке  $z \in M$  должно удовлетворять условию

$$T_z(M) \subset T_z^c(\partial D). \quad (2)$$

Здесь  $T_z(M)$  — пространство, касательное к  $M$  в точке  $z$ ,  $T_z^c(\partial D)$  — комплексное касательное пространство к  $\partial D$  в точке  $z$ , т. е.

$$T_z^c(\partial D) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n : \sum_{k=1}^n \zeta_k \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_k} = 0 \right\}.$$

В той же работе доказано, что если  $M$  принадлежит классу гладкости  $C^3$ , то условие (2) является и достаточным, чтобы  $M$  было многообразием пика для  $A(D)$ . Впоследствии в работе Рудина (2) условие на  $M$  было ослаблено: достаточно, чтобы  $M$  было  $C^1$ -гладким. Случай  $A^\infty(D)$  исследован в (3) и (4).

Настоящая работа посвящена исследованию многообразий пика для  $A^k(D)$ ,  $2 \leq k < +\infty$ . Доказано следующее утверждение:

**Т е о р е м а 1.** *Если подмногообразие  $M$  класса  $C^k$  ( $k \geq 3$ ) на границе строго псевдовыпуклой области  $D$  в каждой точке  $z \in M$  удовлетворяет условию (2), то  $M$  является многообразием пика для  $A^{k-1}(D)$ .*

При доказательстве используется схема, примененная в (1) и (3). Для заданного компакта  $K \subset M$  сперва строится так называемая «почти аналитическая» функция пика  $F(z)$ .

**Т е о р е м а 2** (см. (1), а также (4)). *Пусть  $M$  — то же, что и в теореме 1,  $K$  — компакт на  $M$ . Тогда в некоторой окрестности  $\Omega$  этого компакта существует функция  $F \in C^k(\Omega)$ , такая, что*

- a) *На множестве  $\bar{D} \cap \Omega$  нули функции  $F$  совпадают с  $K$ ;*
- b)  *$\bar{\partial}F = 0$  на  $M$ , более того,  $\bar{\partial}F(z) = o(d(z, M)^{k-1})$ , где  $d(z, M)$  — расстояние между  $z$  и  $M$ ;*
- c)  *$\operatorname{Re} F(z) \geq cd(z, M)^2$  при  $z \in \bar{D} \cap \Omega$ . Здесь  $c$  — константа, зависящая только от области  $D$ ;*
- d)  $\operatorname{grad} \operatorname{Re} F(z) = -\frac{\chi_z}{\|\chi_z\|^2}$ ,  $\operatorname{grad} \operatorname{Im} F(z) = -\frac{\tau_z}{\|\tau_z\|^2}$ , где  $\chi_z = \operatorname{grad} \rho(z)$ ,  $\tau_z = i\chi_z$ .

Пусть функция  $\lambda(z) \in C^\infty(\Omega)$  финитна в  $\Omega$ ,  $\lambda(z) = 1$  в некоторой окрестности компакта  $K$  и  $0 \leq \lambda(z) \leq 1$ . Рассмотрим форму  $g(z) = \bar{\partial} \frac{\lambda(z)}{F(z)}$ .

**Л е м м а .** *Уравнение  $\bar{\partial}u = g$  в области  $D$  имеет решение  $u(z)$ , бесконечно дифференцируемое на множестве  $\bar{D} \setminus M$  и удовлетворяющее оценке*

$$D^p u(z) = o(d(z, M)^{k-|p|-3}). \quad (3)$$

Здесь  $p = (p_1, \dots, p_n)$  — целочисленный вектор,  $|p| = \sum_{k=1}^{2n} p_k$  и

$$D^p u(z) = \frac{\partial^{|p|} u(z)}{\partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n} \partial \bar{z}_1^{p_{n+1}} \dots \partial \bar{z}_n^{p_{2n}}}.$$

Решение  $u(z)$ , допускающее оценку (3), выписывается явной формулой, полученной в (5):

$$u(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left\{ \int_{\partial D \times [0,1]} g(\zeta) \wedge \omega'(\eta) \wedge \omega(\zeta) - \int_D g(\zeta) \wedge \omega' \left( \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) \right\},$$

где 
$$\omega'(\eta) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \eta_k d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_{k-1} \wedge d\eta_{k+1} \wedge \dots \wedge d\eta_n,$$

$$\omega(\zeta) = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n, \quad \eta_k = (1-t) \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^2} + t \frac{P_k(\zeta, z)}{\Phi(\zeta, z)},$$

$\Phi(\zeta, z)$  — ядро Хенкина-Рамираца и  $\sum_{k=1}^n (\zeta_k - z_k) P_k(\zeta, z) \equiv 1$ . Оценка (3) основана на том, что форма

$$g = \bar{\partial} \frac{\lambda}{F} = \frac{1}{F} \bar{\partial} \lambda - \lambda \frac{\bar{\partial} F}{F^2}$$

бесконечно дифференцируема на  $\bar{D} \setminus M$ , а при подходе к  $M$  имеет степенной рост. А именно, из b)–d) следует, что  $g(z) = o(d(z, M)^{k-5})$  при  $z \rightarrow M$  вдоль комплексного касательного направления и  $g(z) = o(d(z, M)^{k-3})$  при  $z \rightarrow M$  вдоль комплексной нормали, т. е. плоскости векторов  $\chi$  и  $\tau$ .

**Доказательство теоремы 1.** Пусть компакт  $K \subset M$ , функции  $F(z)$  и  $u(z)$  те же, что в теореме 2 и лемме. Рассмотрим функцию

$$v(z) = \frac{\lambda(z)}{F(z)} - u(z).$$

Имеем  $\bar{\partial} v = \bar{\partial} \frac{\lambda}{F} - \bar{\partial} u = g - \bar{\partial} u = 0$ , т. е.  $v(z)$  голоморфна в области  $D$ . Далее,

$$\operatorname{Re} v = \lambda \frac{\operatorname{Re} F}{|f|^2} - \operatorname{Re} u. \quad (4)$$

Из (3) при  $k \geq 3$  и  $p = 0$  следует, что  $u(z) = o(d(z, M))$ , т. е. функция  $u(z)$  ограничена на  $\bar{D}$ . Поэтому с учетом с) и (4) имеем

$$\operatorname{Re} v(z) \geq - \max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re} u(z) > -\infty.$$

Добавив в случае необходимости к функции  $u(z)$  соответствующую константу, можно предположить, что

$$\operatorname{Re} v(z) > 0 \quad \text{при } z \in \bar{D} \setminus K. \quad (5)$$

Покажем, что функция

$$f(z) = \frac{1}{v(z)} = \frac{F(z)}{\lambda(z) - u(z)F(z)} \quad (6)$$

является искомой функцией пика для компакта  $K$ . Прежде всего,  $f(z)$  голоморфна в  $D$  и, как следует из (5),  $\operatorname{Re} v(z) > 0$  при  $z \in \bar{D} \setminus K$ . Из (6) следует, что нули  $f(z)$  совпадают с нулями  $F(z)$ , т. е. с множеством  $K$  (см. а)). Таким образом,  $f$  удовлетворяет условиям (1). Остается показать, что  $f \in A^{p-1}(D)$ . Функция  $f$  на множестве  $\bar{D} \setminus K$  принадлежит классу  $C^k$ , поэтому проверять непрерывность  $D^p f$ ,  $|p| \leq k-1$  следует лишь в окрестности  $K$ , где имеем

$$f(z) = \frac{F(z)}{1 - u(z)F(z)}.$$

Взяв для простоты случай  $p = (k - 1, 0, \dots, 0)$ , получаем

$$D^p f = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m+1} m!}{(1 - uF)^{m+1}} C_{k-1}^m C_m^j D^{k-1-m} F \cdot D^{m-j} F \cdot D^j u. \quad (7)$$

Из оценок (3) следует, что при  $j < k - 2$  производные  $D^j u$  непрерывны на  $\bar{D}$ . А те слагаемые в (7), которые содержат  $D^{k-2}u$  или  $D^{k-1}u$ , имеют соответствующие сомножители  $F$  и  $F^2$ , которые «гасят» рост этих производных.  $\square$

Ереванский Государственный Университет

## Ա. Ի. Պերրոսյան

### Պիկի բազմությունները խիստ պակտոտուցիկ տիրույթում ողորկ ֆունկցիաների դասերի համար

Դիցուք  $D$ -ն խիստ պակտոտուցիկ տիրույթ է  $\mathbb{C}^n$  փարածության մեջ,  $M$ -ը նրա  $\partial D$  եզրի վրա ենթաբազմաձևություն է, որը յուրաքանչյուր  $z \in M$  կետում բավարարում է  $T_z(M) \subset T_z^c(\partial D)$  պայմանին:

Այսպես  $T_z(M)$ -ը  $M$  բազմաձևության շոշափող փարածությունն է, իսկ  $T_z^c(\partial D)$ -ն  $\partial D$ -ի կոնալիքս շոշափող փարածությունն է  $z$  կետում:  $A^k(D)$ -ով նշանակվում է  $D$ -ում հոլոմորֆ և  $\bar{D}$ -ում մինչև  $k$ -րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող ֆունկցիաների դասը:

Նոդվածում ապացուցվում է, որ եթե  $M$ -ը պարկանում է  $C^k$  դասին, ապա կամայական  $K \subset M$  կոմպակտ բազմություն հանդիսանում է պիկի բազմություն  $A^{k-1}(D)$ -ի համար:

## Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

1. Г. М. Хенкин, А. Е. Туманов, В сб.: Матем. прог. и смежные вопросы. М., 1976, стр. 74–86. Перевод: А. Е. Tumanov, G. M. Henkin, Interpolation submanifolds of pseudoconvex manifolds, Amer. Math. Soc. Transl. (2), Vol. 115, 1980, 59–69.
2. W. Rudin, Peak-interpolation sets of class  $C^1$ , Pacific J. Math. **75**, 1978, 267–279.
3. M. Hakim, N. Sibony, Ensembles pics dans des domaines strictement pseudoconvexes, Duke Math. J. Vol. 45, No. 3, 1978, 601–617.
4. J. Chaumat, A. M. Chollet, Ensembles pic pour  $A^\infty(D)$ , Ann. Inst. Fourier, 1979, vol. **29**, 3, pp. 171–200.
5. Г. М. Хенкин, Мат. сб. т. 82, № 2 (1970).